

NOM :

Prénom :

M1. Cinématique

Ce domaine de la physique vise l'étude des mouvements sans tenir compte des causes, à savoir les forces.

A- Eléments de base

1. Les grandeurs physiques

Le système international d'unités :

Le système d'unités le plus utilisé est le système MKS (mètre, kilogramme, seconde) appelé aussi SI (système international). Complété de 4 autres unités (peu rencontrées en mécanique : l'ampère, le Kelvin, la mole et le candela), il forme le Système International d'unités (SI). Celui-ci constitue une base à partir de la quelle toute autre unité peut être exprimée.

Les équations aux dimensions :

Chaque grandeur physique peut être exprimée à partir de 3 dimensions (ou 7 plus généralement) : la longueur **L**, la masse **M** et le temps **T**.

Grandeur	Unité SI	Dimension
longueur		
masse		
temps		
vitesse		
accélération		
force		
Travail d'une force		
pression		
puissance		
masse volumique		

Homogénéité :

Les éléments qu'on additionne ainsi que les deux membres d'une équation littérale doivent avoir la même dimension, puisqu'ils représentent des grandeurs de même nature.

Il est recommandé de vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de passer à l'application numérique.

Exemple : un résultat littéral obtenu a pour expression : $f = \rho \cdot a$, où f est une force, ρ une masse volumique et a une accélération. Vérifions si cette expression est homogène.

2. Les vecteurs

Il existe deux types de grandeurs en physique :

- les scalaires (masse, distance, volume, énergie, etc.)
- les vecteurs (forces, champ magnétique, champ de gravitation, champ électrique, vitesse, accélération, etc.)

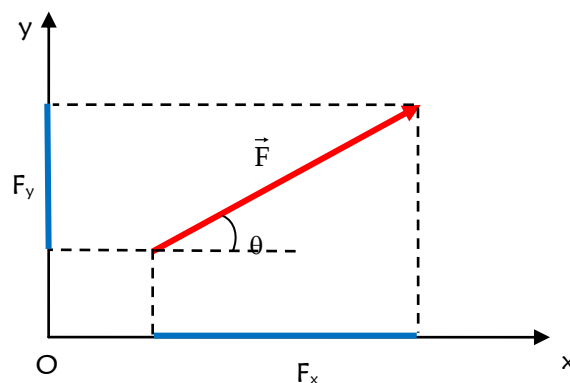
Un vecteur est défini par :

- son origine (ex : point d'application d'une force),
- sa direction (ex : droite d'action de la force),
- son sens,
- sa norme (ou valeur, ou intensité)

Composantes d'un vecteur en coordonnées cartésiennes

Soit un vecteur $\vec{F}$ faisant un angle θ avec l'horizontale.

Ses composantes dans le repère (O, x, y) sont :



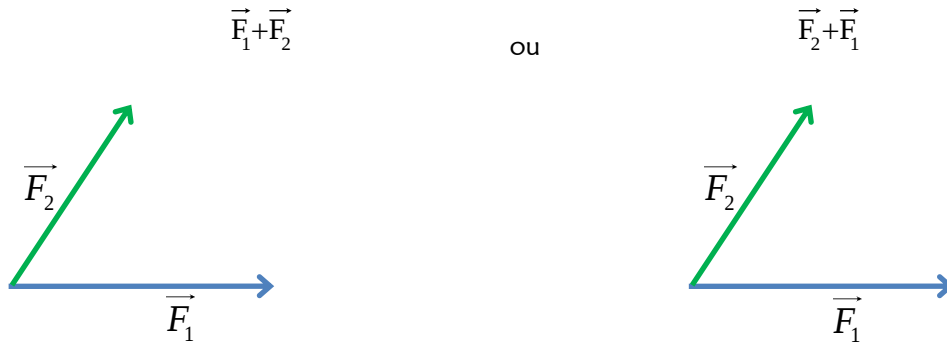
On peut aussi exprimer la norme de $\vec{F}$ et l'angle θ :

Addition de 2 vecteurs

Soit $\vec{R}$ la résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Méthode graphique

Pour additionner deux vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, on fait coïncider l'origine du 2^{ème} vecteur avec l'extrémité du 1^{er}. La somme est le vecteur obtenu en joignant l'origine du 1^{er} vecteur avec l'extrémité du 2^{ème}.



La comparaison des deux figures montre que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on additionne les vecteurs.

Méthode analytique

Pour déterminer les composantes de $\vec{R}$, on additionne celles de $\vec{F}_1 \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix}$ et $\vec{F}_2 \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix}$:

La norme du vecteur $\vec{R}$ est :

Multiplication par un scalaire

Toutes les coordonnées cartésiennes de $\vec{U}$ sont multipliées par « a ».

$$\vec{V} = a\vec{U}$$

En coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques (cf. plus loin), seule la coordonnées « r » est multipliée par « a ».

Produit scalaire de 2 vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs est une grandeur scalaire, positive ou négative.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 =$$

$$\text{où } \alpha \text{ est l'angle } \alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Remarques :

- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ d'un repère orthonormé, on a : $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$
- Expression cartésienne du produit scalaire : soient $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

3. Les dérivées et primitives

En cinématique, l'étude du mouvement est principalement faite en fonction du temps noté t : ce sont des équations horaires.

Nous avons souvent besoin d'exprimer soit la dérivée, soit la primitive de ces fonctions.

Compléter : (a et b étant des valeurs constantes)

Fonction $x(t)$	Dérivée $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$	Primitive $\int x.dt$
0		
a		
a. t		
t^2		
t^n		
$\frac{1}{t}$		
$\sin(t)$		
$\cos(t)$		
$\cos(a.t+b)$		

B- Différents systèmes de coordonnées

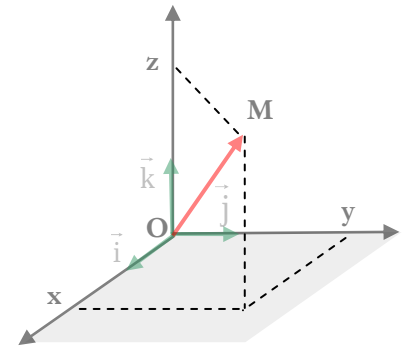
1. Coordonnées cartésiennes

On associe à l'espace un repère orthonormé direct (O, x, y, z) dont les vecteurs unitaires sont $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (Orientation donnée par la main droite : pouce : $\vec{i}$; index : $\vec{j}$; majeur : $\vec{k}$)

Les coordonnées du point M sont notées : $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} =$$



2. Le repère de Frenet

Ce système de coordonnées est plus souvent utilisé pour les systèmes en rotation dans un plan, notamment pour exprimer l'accélération. Il est lié au point M en mouvement.

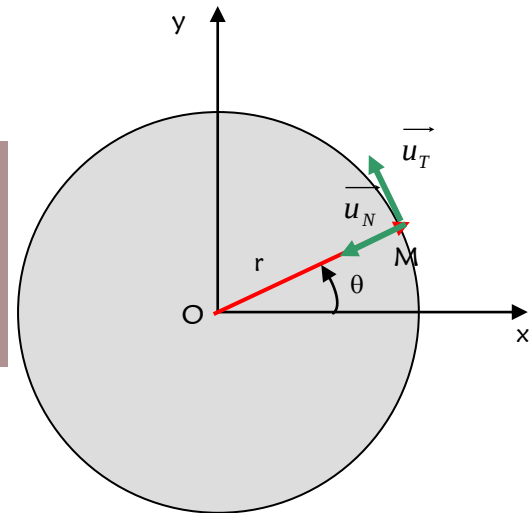
Le repère de Frenet est défini par deux vecteurs unitaires :

- $\vec{u}_T$ tangent à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement,
- $\vec{u}_N$ normal (perpendiculaire) à la trajectoire et orienté vers l'intérieur de la courbure.

Les coordonnées de M sont : $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} =$$



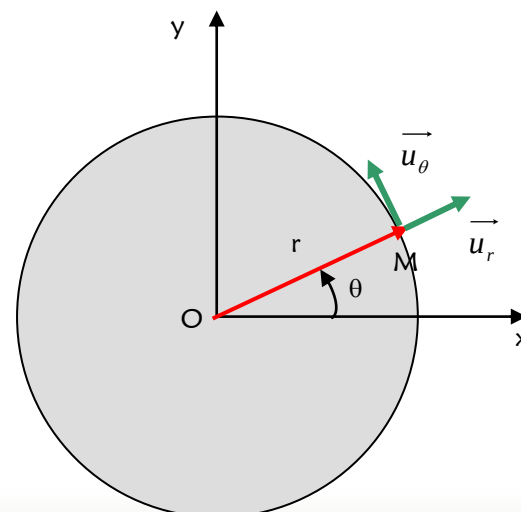
3. Coordonnées polaires

Ce système de coordonnées peut être utilisé pour les systèmes en rotation dans un plan. Les vecteurs unitaires sont $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

Les coordonnées polaires de M sont : $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} =$$



4. Coordonnées cylindriques

Ce système de coordonnées est une extension à 3 dimensions des coordonnées polaires. Il est utilisé pour étudier les problèmes à symétrie de révolution (par exemple : mouvement circulaire, rotation d'une roue autour de son axe).

La base unitaire directe est constituée par les vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$:

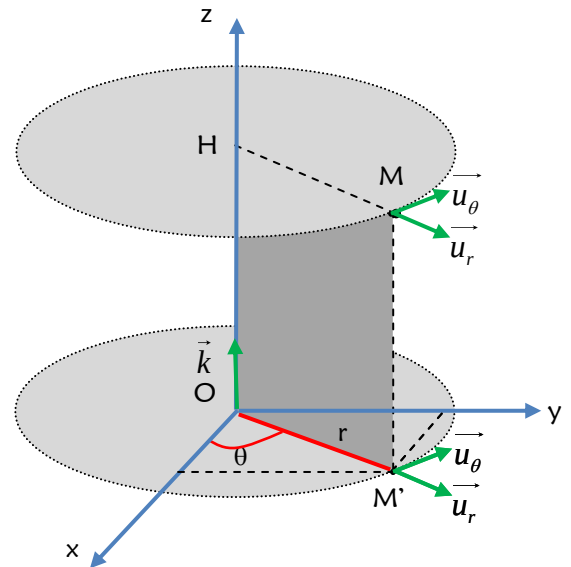
Si on suppose que le point M décrit un cercle de rayon r, à l'altitude OH,

- $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire porté par HM,
- $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire tangent au cercle.

Les coordonnées cylindriques de M sont : $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ h \end{pmatrix}$

On peut exprimer le vecteur

$$\overrightarrow{OM} =$$



5. Coordonnées sphériques

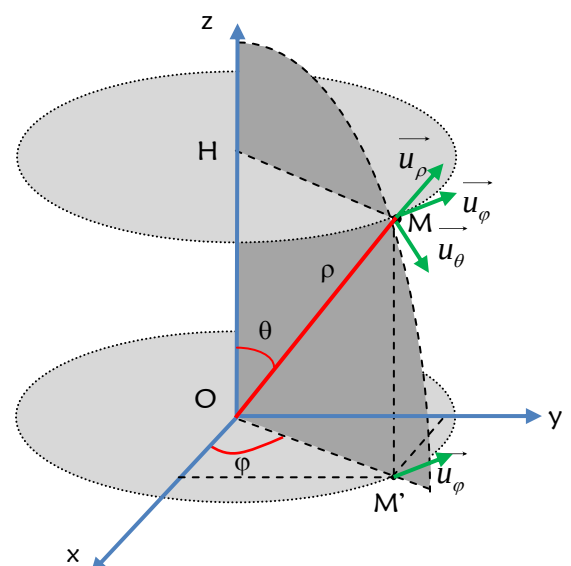
Ce système de coordonnées est utilisé pour décrire les systèmes à symétrie de révolution sphérique.

La base unitaire directe est constituée par les vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ définis sur les schémas suivant (avec $\rho = OM$).

Les coordonnées sphériques de M sont : $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$

On peut exprimer le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} =$$



C- Vecteurs vitesse et accélération

1. La trajectoire

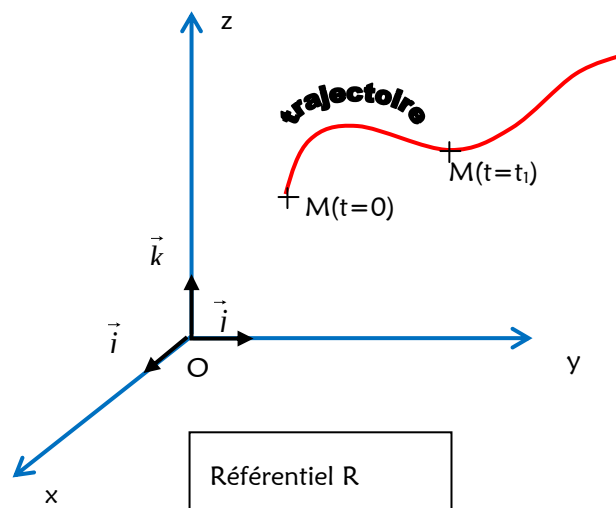
Le référentiel

Un référentiel R est un ensemble de points rigidement liés les uns aux autres (solide au sens mécanique du terme) auxquels on associe un système d'axes (**repère dans l'espace**) et une horloge (**repère dans le temps**).

La vitesse et l'accélération n'ont de sens que si l'on précise le référentiel dans lequel elles sont définies.

La trajectoire

On considère le point M en mouvement par rapport au référentiel R auquel est associé un repère et une horloge. La courbe décrite par M au cours du temps est sa trajectoire. On peut en donner une équation où la variable temporelle t n'apparaîtra pas.



On identifie la trajectoire d'un système avec trois variables :

-
-
-
- et un paramètre :

Les équations des variables de M en fonction du temps sont appelées **équations horaires** du mouvement : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

L'équation qui relie x , y et z , dans laquelle t n'apparaît pas est appelée **équation de la trajectoire** $x(y,z)$.

2. La vitesse

La vitesse moyenne

Sur une grande portion de la trajectoire, la vitesse moyenne (V_{moy}) est la distance (L) parcourue divisée par la durée (Δt) :

Exemple : Calcul de la vitesse moyenne lors d'un trajet de 150 km réalisé en 2 h 30 min :

La vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ a les caractéristiques suivantes :

- Point d'application. :
- Direction :
- Sens :
- Intensité (encore appelée valeur ou norme) :

Détermination de la vitesse instantanée :

L'équation horaire de la vitesse s'obtient en faisant la dérivée par rapport au temps de l'équation horaire de la position.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dots\dots\dots \\ v_y = \dots\dots\dots \\ v_z = \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Remarque : si le vecteur vitesse est constant au cours du mouvement, alors

La vitesse angulaire

Dans le cas de systèmes en rotation, on peut définir la vitesse angulaire notée ω :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad \text{Unité : } \dots\dots$$

Dimension :

3. L'accélération

Expression de l'accélération

Détermination de l'accélération instantanée :

L'équation horaire de l'accélération s'obtient en faisant la dérivée par rapport au temps de l'équation horaire de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad \text{soit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \dots\dots\dots \\ a_y = \dots\dots\dots \\ a_z = \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

L'accélération angulaire

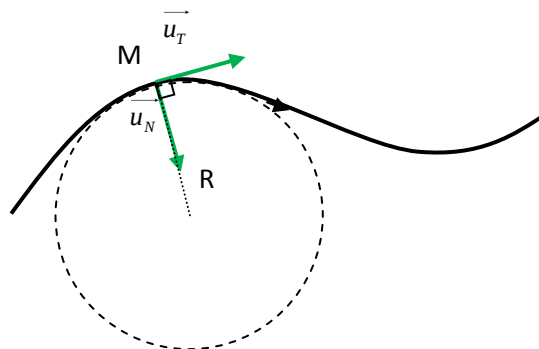
Comme pour la vitesse, on peut définir l'accélération angulaire notée α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \quad \text{Unité : } \dots\dots$$

Dimension :

4. Cas la base de Frenet

Cette base constituée des vecteurs unitaires $\vec{u}_N$ et $\vec{u}_T$ est souvent utilisée pour l'étude de mouvements plans. Elle est liée au point M en mouvement : on parle parfois de coordonnées intrinsèques.



Dans la base de Frenet, le **vecteur vitesse** est : $\vec{v} = v \cdot \vec{u}_T$

et le **vecteur accélération** est : $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_T$

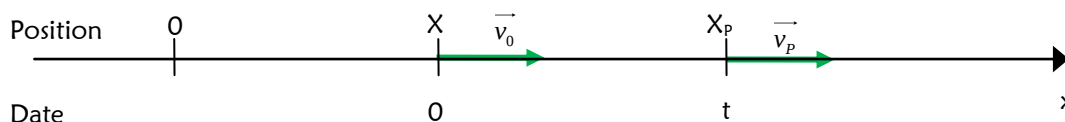
Où R est le rayon de courbure en M.

D- Quelques mouvements particuliers

1. Le mouvement rectiligne uniforme

Définition :

Il s'agit d'un mouvement à vitesse constante dont la trajectoire est une droite.



Caractéristiques du mouvement :

Le vecteur accélération est nul :

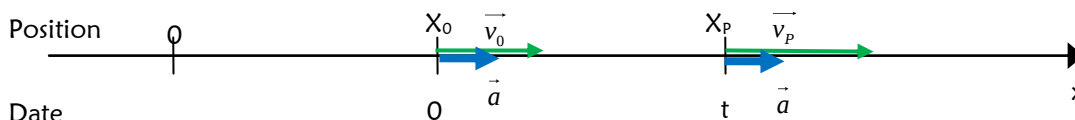
Le vecteur vitesse est constant :

La position au cours du temps est

2. Le mouvement rectiligne uniformément varié

Définition :

Il s'agit d'un mouvement à vecteur accélération constant ; sa trajectoire est une droite.

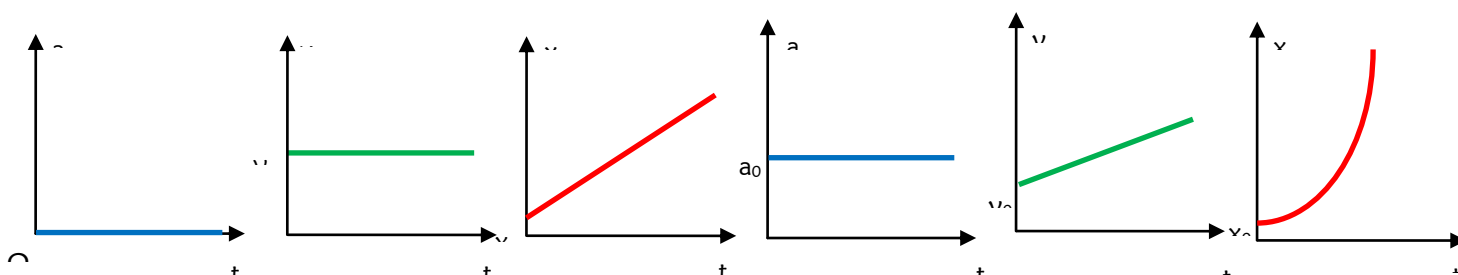


Caractéristiques du mouvement :

Le vecteur accélération est constant :

Le vecteur vitesse est défini par :

La position au cours du temps est



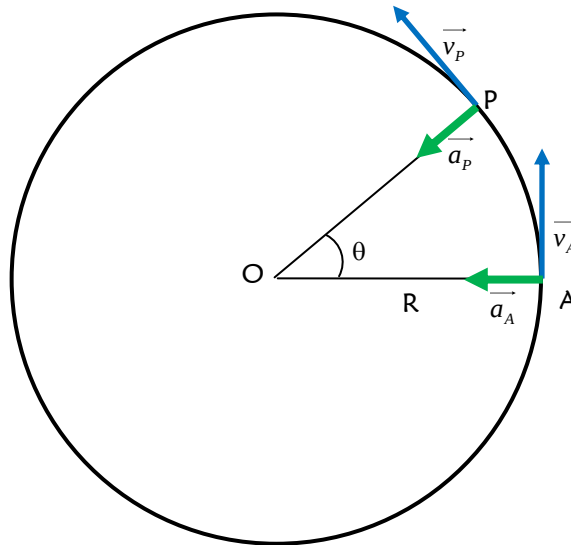
Mouvement rectiligne uniforme

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

3. Le mouvement circulaire uniforme

Définition :

Il s'agit d'un mouvement à vitesse constante dont la trajectoire est un cercle.



Caractéristiques du mouvement en coordonnées linéaires ou curvilignes :

Le vecteur accélération est défini par :

Le vecteur vitesse est défini par :

Caractéristiques du mouvement en coordonnées polaires ou cylindriques :

L'accélération angulaire est nulle :

La vitesse angulaire est constante :

L'angle varie au cours du temps :

Relations entre les coordonnées polaires et curvilignes :

L'abscisse curviligne est :

La vitesse linéaire est :

4. La chute libre

Définition

Un corps est en chute libre s'il est soumis uniquement à son poids lors de sa chute.

Dans ce cas, son accélération est : $\vec{a} = \vec{g}$, où $\vec{g}$ est le vecteur qui représente l'intensité de la pesanteur. ($\vec{g}$ est vertical, vers le bas, sa valeur moyenne est de $9,8 \text{ m.s}^{-2}$).

Dans un repère (O, x, z), le vecteur accélération a pour coordonnées :

Chute d'une hauteur H

Soit un corps de masse m, lâché d'une hauteur H sans vitesse initiale. Son mouvement sera rectiligne selon la verticale. On se place selon un axe vertical (Oz) :

Accélération :

Vitesse :

Position :

Lancé d'un projectile

Soit un corps de masse m, lancé à partir du sol (position initiale : $x=0$, $z=0$) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ (v_{0x}, v_{0y}). Son mouvement sera dans le plan (xOz).

Accélération :

Vitesse :

Position :

Equation de la trajectoire :

Elle s'obtient en éliminant la variable t des équations horaires du mouvement :

Portée x_P :

C'est la distance entre le point de départ et le point de chute : c'est la valeur de x lorsque $z=0$.

Hauteur maximale :

C'est la hauteur maximale atteinte par le projectile. On remarque que la hauteur maximale est obtenue lorsque ... ; on cherche la date t correspondante, puis on calcule la hauteur z pour cette date t.