NOM : Prénom :

M4. Les oscillateurs mécaniques

Un système mécanique peut occuper une même position à intervalles de temps réguliers : sa trajectoire est alors périodique.

Exemples : - rotation d'une planète autour du Soleil
- oscillations d'un gratte-ciel (jusqu'à quelques mètres d'amplitude au sommet) ;

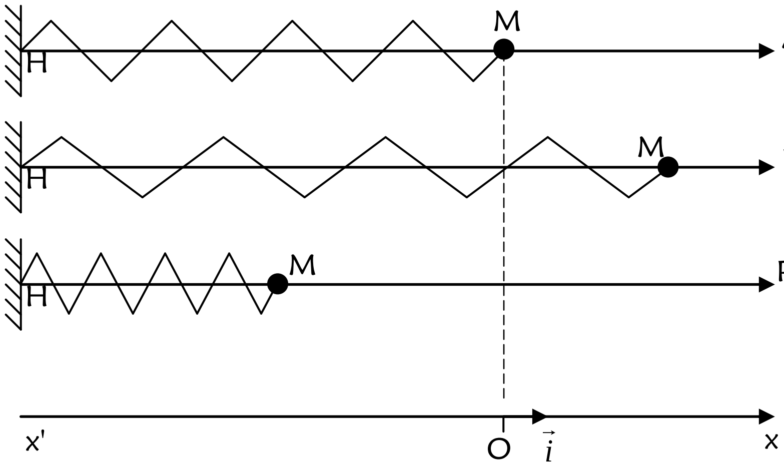
Ce dernier exemple correspond à un mouvement de va et vient : c'est un oscillateur mécanique.

A- Quelques systèmes oscillants non amortis.

1. Oscillations horizontales d'un ressort

Un ressort (à spires non jointives et de masse négligeable) de constante de raideur k est lâché après avoir été écarté de X_M de sa position d'équilibre au repos. A l'extrémité est accrochée une masse M qui oscille alors autour d'un axe horizontal sans frottement.

✍ Représenter les forces dans chaque cas :



Etude dynamique :

Le système étudié étant {M} dans le référentiel terrestre supposé Galiléen, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique :

✍ Exprimer la force de rappel du ressort $\vec{F}_k$ pour un allongement x :

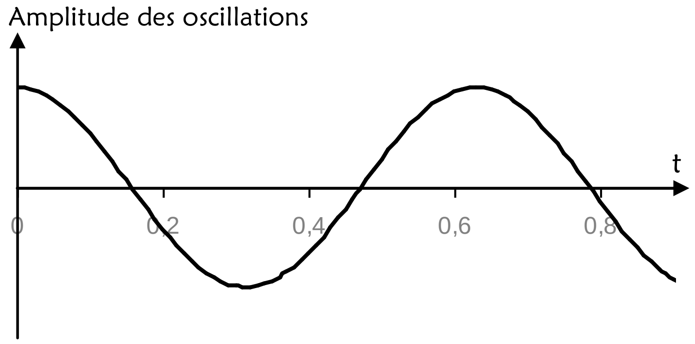
Appliquer le PFD :

Par projection selon x'x : (1)

Par projection selon y'y :

On obtient l'équation (1) : c'est une différentielle du second ordre. La solution générale de cette équation a pour expression (cf annexe) :

$$\boxed{x = A.\cos(\omega_0.t+\varphi)}$$



où A : amplitude maximale des oscillations
ω_0 : pulsation propre des oscillations
φ : phase à t = 0 s.

Rappel :

$\omega_0 = \frac{2.\pi}{T_0}$ où T_0 est la période des oscillations

Cet oscillateur mécanique est appelé **oscillateur harmonique** car les oscillations sont sinusoïdales.

ω_0 dépend des paramètres de oscillateur :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \ldots$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ldots$$

En remplaçant $\ddot{x}$ dans l'équation (1), on trouve :

$\boxed{\omega_0 =}$ Et $\boxed{T_0 =}$ et $\boxed{f_0 =}$

A et φ dépendent des conditions initiales :

{M} est lâché sans vitesse initiale, à partir d'une position x = X_M donc :

Etude énergétique

En l'absence de frottement, il y a conservation de l'énergie mécanique :

✍ E_m = … avec E_c : énergie cinétique
E_{pp} : énergie potentielle de pesanteur
E_{pk} : énergie potentielle élastique

E_m = …

Comme il s'agit d'oscillations horizontales, E_{pp} est constante au cours du mouvement. On peut alors la choisir nulle arbitrairement. Il reste :

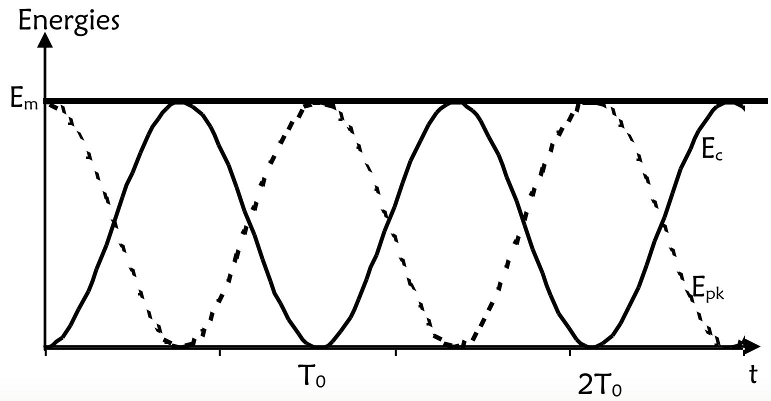
E_m = …

On peut dériver l'expression de l'énergie mécanique constante :

✍

En simplifiant par $\dot{x}$: (la vitesse $\dot{x}$ n'est pas nulle en permanence, sinon il n'y pas de mouvement)

On retrouve alors l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.



L'énergie mécanique se conserve : au cours du mouvement, il y a transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique et vice versa.

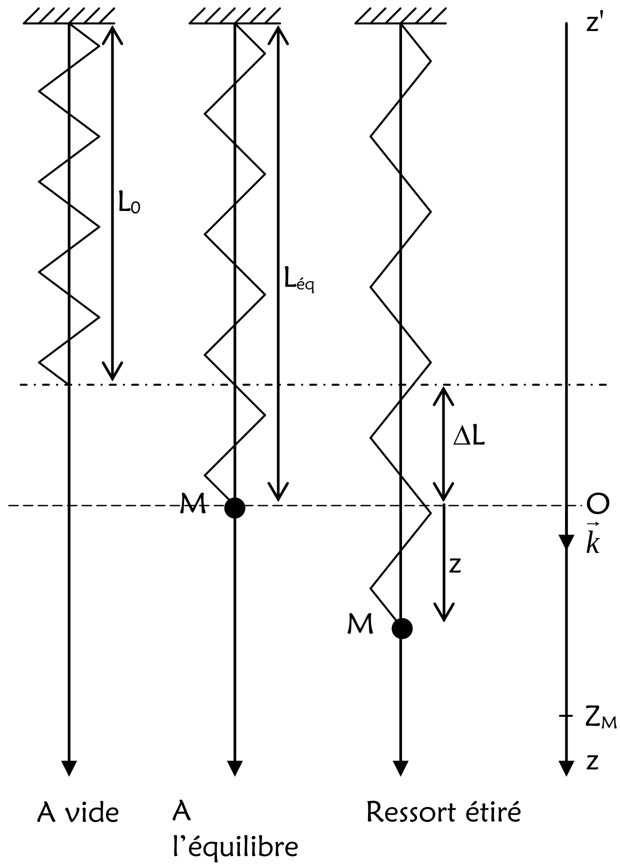
2. Oscillations verticales d'un ressort

On reprend le problème précédent, en position verticale. Cependant, ici, lorsque le système {M} est à l'équilibre, le ressort exerce une certaine tension car le ressort est allongé.

On tire d'une longueur Z_M sur le système par rapport à sa position d'équilibre puis on le lâche.

Représenter les forces dans chaque cas.

On applique de la même façon le PFD :



On retrouve une équation différentielle du second ordre. La solution est du même type que pour le ressort horizontal. Avec les conditions initiales similaires, on trouve :

$$z = z_M . \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} . t\right)$$

Lorsque le ressort est en position verticale, il n'oscille plus autour de sa position au repos L_0 mais autour de sa position à l'équilibre $L_{éq} = (L_0 + \Delta L)$ lorsque la masse M est accrochée !

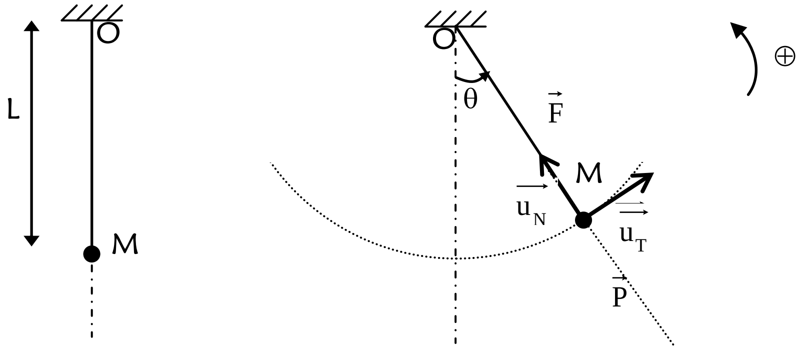
<u>Remarque :</u> en choisissant l'origine de l'axe (z'z) en ce point d'équilibre, on simplifie la résolution de l'équation différentielle.

3. Oscillations du pendule

EXPERIENCE HISTORIQUE DE GALILEE (DEBUT XVII^{EME} SIECLE) : il constata que, quelle que soit la masse, la période du pendule est constante et ne dépend que de la racine carrée de la longueur.

Supposons un objet ponctuel M, de masse m, accrochée à un fil idéal (masse négligeable, inextensible) de longueur L. Ce pendule est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_M par rapport à la verticale puis lâché sans vitesse initiale.

Afin de repérer s'il est vers la droite ou la gauche, on doit donner une valeur algébrique à l'angle θ, et orienter l'espace.



Pour l'étude d'un système {M} en rotation, il est commode d'utiliser le repère de Frenet $(\overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T})$.
L'accélération peut alors s'exprimer en M :

✎ $\vec{a}$ = ...

or on a la relation entre la vitesse linéaire v et la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$:...

donc $\vec{a}$ = ... soit a_N = et a_T =

Le système étudié est {M} dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Les frottements sont négligés. On applique la 2ème loi de Newton :

✎

Projection selon $\overrightarrow{u_N}$: (on ne s'intéresse pas à cette équation ici)

Projection selon $\overrightarrow{u_T}$: avec P = m.g

Soit (3)

On obtient une équation dont la résolution n'est pas évidente. Pour contourner le problème, on effectue l'approximation suivante :

Pour un angle θ faible, on peut écrire $\sin\theta \approx \theta$ (avec θ en radian)

(Développement limité à l'ordre 1 de la fonction sinus ; on peut en dire de même de tan $\theta \approx \theta$, mais évidemment pas de cos θ, qui lui est voisin de 1 lorsque l'angle est très petit)

L'équation (3) devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}.\theta \cong 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre, dont la solution est de la forme :

$$\theta(t) = A.\cos(\omega_0.t + \phi)$$

De la même façon, on trouve la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

(le déphasage φ dépendant des conditions initiales : ici $\varphi = 0$).

Les conditions initiales (lâché sans vitesse initiale d'un angle θ_M) simplifient alors la solution :

$$\theta = \theta_M.\cos(\omega_0.t)$$

Remarques :

On constate que la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ne dépend pas de la masse. Par ailleurs, la mesure de la période propre du pendule « idéal » nous donne accès à une mesure de l'intensité de la pesanteur !

Compte tenu de l'approximation faite, si $\theta_M < 23°$, alors l'écart à la réalité est inférieur à 1 %.

B- Les phénomènes d'amortissement

Nous avons jusque-là considéré des situations idéales. En réalité, d'autres forces agissent sur le système en entravant le mouvement : c'est le phénomène d'amortissement.

Il s'agit notamment des frottements qui font que l'énergie mécanique du système diminue (pertes sous forme de chaleur).

Si les pertes sont faibles, alors l'amplitude des oscillations diminue lentement : le régime est alors pseudo-périodique.

Si les pertes sont importantes, alors le système revient à sa position d'équilibre sans osciller : le régime est apériodique.

1. Le cas du ressort horizontal

Reprenons le problème du paragraphe 4.1.1..

Les frottements cinétiques système {M} dans un fluide (gaz, liquide) peuvent être représentés par le modèle visqueux :

$\vec{f} = -f.\vec{v} = -f.\dot{x}\vec{i}$ où f représente le coefficient de viscosité

On applique alors la 2ème loi de Newton :

$\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F_k} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection selon x'x : $0 + 0 - k.x - f.\dot{x} = m.\ddot{x}$

Ce qui donne $$\boxed{\ddot{x} + \frac{f}{m}.\dot{x} + \frac{k}{m}.x = 0}$$ C'est une équation différentielle d'ordre 2.

2. Le cas du pendule

Reprenons le problème du paragraphe 4.1.3..

Les frottements cinétiques du pendule dans l'air peuvent être représentés par le modèle visqueux :

$\vec{f} = -f.\vec{v} = -f.L.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_T}$ où f représente le coefficient de viscosité

On applique alors la 2ème loi de Newton :

$\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$

Projection selon $\overrightarrow{u_T}$: $-P.\sin(\theta) - f.L.\dot{\theta} = m.L\ddot{\theta}$ soit pour θ petit : $-mg.\theta - f.L.\dot{\theta} = m.L\ddot{\theta}$

Ce qui donne $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{f}{m}.\dot{\theta} + \frac{g}{L}.\theta = 0}$$ C'est une équation différentielle d'ordre 2.

3. Solutions

Ces équations différentielles sont de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{x} + \omega_0{}^2.x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{\theta} + \omega_0{}^2.\theta = 0$$

avec Q est le facteur de qualité

ω_0 a été défini en partie 4.1.

Le facteur de qualité Q caractérise l'aptitude du système à osciller ou non. Il dépend des caractéristiques de l'oscillateur.

Donner ainsi l'expression du facteur de qualité dans les 2 cas précédents, par analogie :

✍ Pour le pendule :

Pour le ressort horizontal :

Quelle est la dimension de Q ?

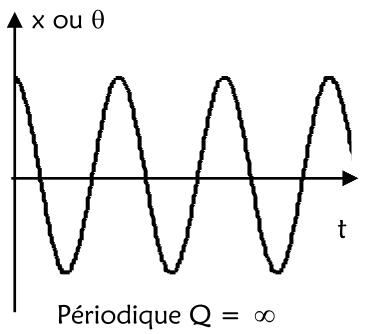
✍

On peut démontrer que l'expression de la solution de l'équation différentielle dépend de la valeur de Q (cf annexe). On retiendra :

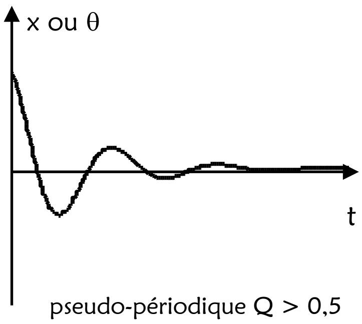
Pour un facteur de qualité Q < ½ , le régime est apériodique (pas d'oscillations)

Pour un facteur de qualité Q = ½, le régime est dit critique

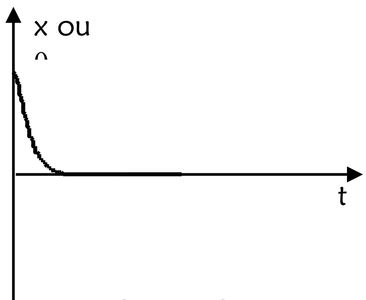
Pour un facteur de qualité Q > ½, le régime est alors pseudo-périodique.



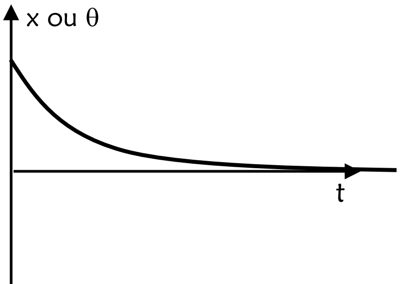
Périodique Q = ∞



pseudo-périodique Q > 0,5



Critique Q =0,5



Apériodique Q < 0,5

Déterminer l'expression du coefficient de frottement visqueux critique dans les 2 cas étudiés :

✍ Pour le ressort horizontal :

Pour le pendule :

Pour Q > 0,5, la solution physique de ces équations différentielles (cf. annexe) a pour forme (avec toujours les mêmes conditions initiales) :

$$x(t) = X_M . e^{-\frac{t}{2.Q}} . \cos(\omega . t)$$

ou

$$\theta(t) = \theta_M . e^{-\frac{t}{2.Q}} . \cos(\omega . t)$$

avec ω : pseudo-pulsation (elle diffère légèrement de la pulsation ω_0 définie sans amortissement : voir annexe)

<u>Le terme $\cos(\omega.t)$ traduit la présence d'oscillations et le terme $e^{-\frac{t}{2.Q}}$ traduit l'amortissement de l'amplitude de ces oscillations.</u>

C- Les oscillations forcées

Certaines forces peuvent favoriser des oscillations (effet du vent sur un gratte-ciel, effet d'un dos d'âne sur une voiture…), ce qui peut parfois conduire à des catastrophes (amplification des oscillations ou résonance).

Dans ce cas, l'énergie perdue par l'oscillateur amorti est restituée à chaque période par un dispositif extérieur.

Reprenons l'exemple du ressort horizontal. Appliquons-lui une force horizontale périodique d'expression :

$F_{ext} = F_M . \cos(\Omega t)$

En appliquant le PFD, on a : $\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{F_k} + \vec{f} + \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

Ce qui donne $\ddot{x} + \frac{f}{m}.\dot{x} + \frac{g}{L}.x = F_M.\cos(\Omega.t)$ C'est une équation différentielle d'ordre 2 avec second membre

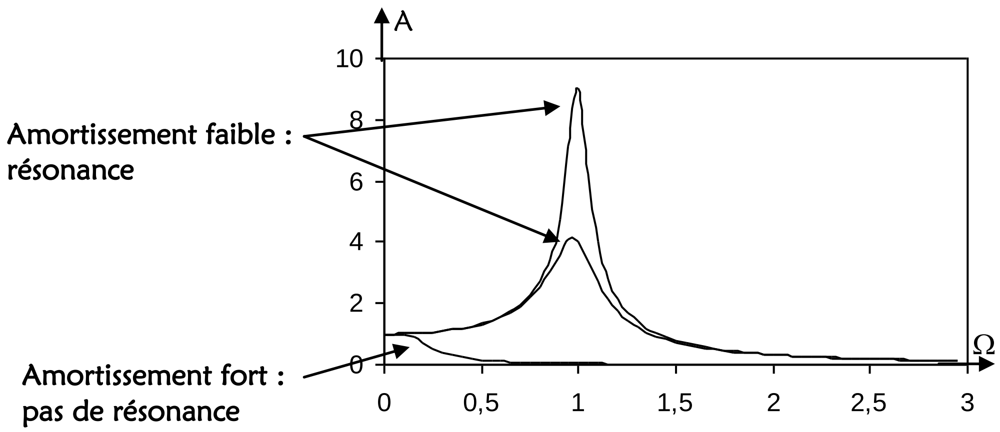
L'oscillateur est alors forcé à osciller à la même pulsation Ω que la force extérieure.

Dans ce cas, on ne parle plus de pseudo-période, puisque la pulsation ne dépend plus du système, mais de l'excitateur. La solution, après un certain temps de régime transitoire, a la forme :

$$x = A.\cos(\Omega.t + \varphi)$$

Néanmoins, les caractéristiques du système font qu'il va répondre plus ou moins bien à l'excitateur, avec une amplitude A plus ou moins marquée en fonction de l'excitation de pulsation Ω

<u>Si le facteur de qualité $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors il apparaîtra un phénomène de résonance dès que la pulsation de l'excitateur atteindra approximativement la pulsation propre ω_0.</u> (en réalité, pour $\Omega = \omega = \omega_0 . \sqrt{1 - \frac{1}{2.Q^2}}$)



ANNEXE

Notations

➔ On rappelle les grandeurs usuelles des phénomènes périodiques :

<u>Période T :</u> durée la plus courte au bout de laquelle le phénomène se répète identique à lui-même (unité : la seconde s)

<u>Pulsation ω :</u> grandeur associée à la période : $\omega = \frac{2.\pi}{T}$ (unité : le radian par seconde rad.s^{-1})

<u>Fréquence f :</u> nombre de répétitions du phénomène périodique par seconde $f = \frac{1}{T}$ (unité : le Hertz Hz)

➔ La dérivée d'une variable par rapport au temps peut être notée : $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ (x' en mathématiques)

➔ La dérivée seconde d'une variable par rapport au temps peut être notée : $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ (x'' en mathématiques)

Dérivée de fonctions composées

Notions mathématiques

D'une manière générale, si on considère la fonction composée f (g (t)) (encore notée en mathématiques f ○ g), alors sa dérivée s'exprime (notations mathématiques :

(f (g (t))' = g' (t) . f '(g(t)) (soit encore : f ○ g' = g'.(f '○ g)),

Voyons quelques exemples :

- Soit la fonction cos (a.t + b) : c'est la composition de 2 fonctions :

  f (t) = cos (t) et g (t) = a.t + b.

  On peut écrire : cos (a.t + b) = f (g (t))

  Donc, si on dérive cette fonction, cela donne : (cos (a.t + b))' = g' (t). f '(g (t))

  Avec : f '(t) = - sin (t) et g' (t) = a

  Finalement, on a : (cos (a.t + b))' = -a.sin (a.t + b)

- Soit la fonction (x '(t))² : c'est la composition de 2 fonctions :

  f (t) = t ² et g (t) = x '(t) dérivée de x (t)

  Les dérivées sont : f '(t) = 2.t et g' (t) = x ''(t) : dérivée seconde de x (t)

  Finalement, on a : (x '(t))² = x ''(t).2.x '(t)

- Application à l'étude des oscillateurs

  Pour x = X_m.cos (ω_0.t + φ), on a la dérivée $\dot{x}$ = - X_m.ω_0. sin (ω_0.t + φ)

  Pour la fonction $(\dot{\theta})^2$, on a la dérivée : $\dot{((\dot{\theta})^2)} = 2.\ \ddot{\theta}.2.\dot{\theta}$

Solutions usuelles d'une équation différentielle en physique

On peut être amené à déterminer la solution d'une équation comportant une dérivée, voire une dérivée seconde.

Equation différentielle du premier ordre

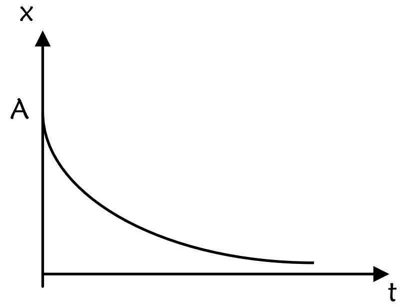
Il s'agit d'une équation du type : $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{\tau}=0$ (τ est positif)

Alors la solution x est une fonction exponentielle de la forme :

$\boxed{x = A.e^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec τ :temps de relaxation en secondes.

A : constante qui dépend des conditions initiales.

Allure de la courbe :



Equation différentielle du second ordre

Sans dérivée première du type dx/dt

Il s'agit d'une équation du type : $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2.x=0$ (ω_0 est positif)

La solution de l'équation différentielle s'écrit : $x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

soit encore $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \phi)}$ avec ω_0 : pulsation propre en $rad.s^{-1}$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ où T_0 : période propre

où A et Φ sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Il s'agit d'oscillations libres non amorties.

Avec dérivée première du type dx/dt

Il s'agit d'une équation du type : $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}.\frac{dx}{dt}+\omega_0^2.x=0$ (Q et ω_0 sont positifs)

On définit alors ce que l'on appelle l'équation caractéristique de cette équation différentielle :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}.r+\omega_0^2=0$$

L'idée consiste à trouver les solutions r_1 et r_2 de cette équation du second degré.

Son déterminant est $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4.\omega_0^2$. On distingue alors trois cas :

1) $\Delta > 0$ soit Q < ½ : les solutions r_1 et r_2 donnent la solution de l'équation différentielle :

$$x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \text{ (A et B constantes)}$$

x(t) est une exponentielle décroissante : le régime est dit « **apériodique** »

2) $\Delta = 0$ soit Q = ½ : les solutions r_1 et r_2 sont identiques ($r_1 = r_2 = c$) d'où la solution de l'équation différentielle :

$$x = (a + bt)e^{ct} \text{ (a et b constantes)}$$

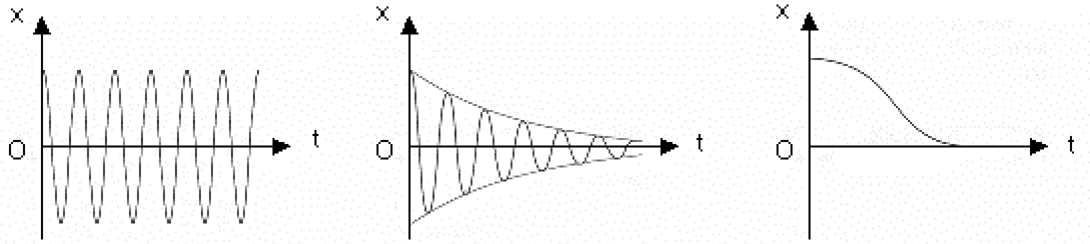
le régime est dit « **critique** »

3) $\Delta < 0$ soit Q > ½ : les solutions r_1 et r_2 sont complexes, on obtient la solution réelle à l'équation différentielle :

$x(t) = X_m.e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.\cos(\omega.t + \varphi)$ où X_m et φ dépendent des conditions initiales.

ω est la pseudo-pulsation : $\omega = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$

le régime est « **pseudo-périodique** » (le système se comporte donc comme un oscillateur amorti)



Frottement nul
Mouvement périodique

Frottement faible
Mouvement pseudo-périodique

Frottement important
Mouvement apériodique

Equation différentielle avec second membre

Voici une équation différentielle de la forme : $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = A$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = A$

A quelconque

La solution est établie en 3 temps :

① On trouve la solution $x_1(t)$ de l'équation sans second membre : $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = 0$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = 0$

② On trouve une solution particulière $x_2(t)$ de l'équation $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = A$ ou $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}.\frac{dx}{dt} + \omega_0^2.x = A$

(c'est souvent une constante)

③ La solution générale du problème est alors $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$