NOM : Prénom :

M6. Rotation d'un solide

On limitera notre étude à la rotation autour d'un axe fixe.

L'étude du mouvement d'un solide, lorsqu'il n'est plus ponctuel, ne peut plus se limiter à l'application du Principe Fondamental de la Dynamique tel que nous l'avons vu.

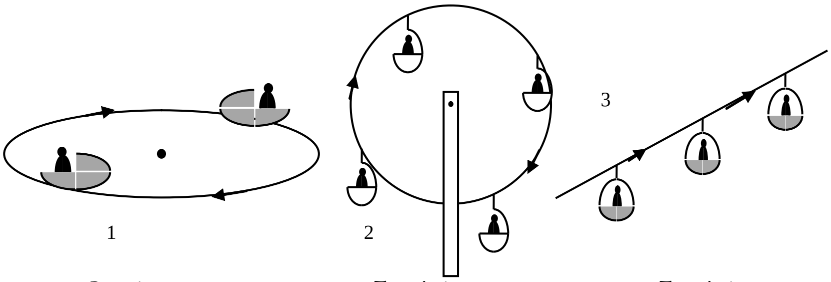
En effet, alors qu'un solide ponctuel est forcément animé d'un mouvement de translation, ce mouvement peut être combiné à un mouvement de rotation pour un solide réel.

Notion de translation et de rotation pour un solide :

Dans un référentiel choisi, un solide est en **mouvement de translation** s'il conserve la même orientation au cours du mouvement.

Dans le cas contraire, son mouvement peut être décomposé en un mouvement de translation et **un mouvement de rotation** autour d'un axe.

EXEMPLES :



Rotation Translation Translation

A- Cas d'un solide ponctuel.

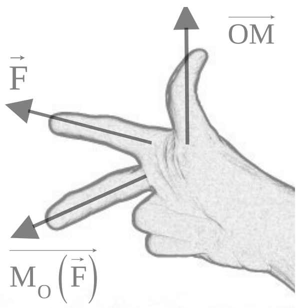
1. Le moment d'une force.

C'est une grandeur vectorielle qui caractérise l'efficacité d'une force $\vec{F}$ appliqué en M pour faire tourner un solide autour d'un axe passant par O. On la note $\overrightarrow{M_O(\vec{F})}$.

Elle se définit comme étant le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{M_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

RAPPEL : La direction de $\overrightarrow{M_O(\vec{F})}$ peut se retrouver à l'aide de la règle des 3 doigts de la main droite (si le pouce représente $\overrightarrow{OM}$ et l'index représente $\vec{F}$, alors le majeur représente $\overrightarrow{M_O(\vec{F})}$).

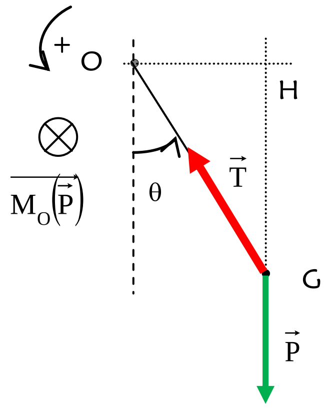


Dimension et unité du moment d'une force :

$$\left[\overline{M_O\left(\vec{F}\right)}\right] = \left[\overline{OM}\right] . \left[\vec{F}\right] = L.M.L.T^{-2} = M.L^2.T^{-2}$$

Cette grandeur peut donc s'exprimer dans le Système International en kg.m².s⁻², mais habituellement on la note en N.m.

Exemple : le pendule.



On considère la rotation d'un solide ponctuel G de masse m, pendu à un fil de longueur L et de masse négligeable, accroché en O.

A chaque force, on peut associer un moment par rapport à O :

$$\overline{M_O(\vec{T})} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{T} = \vec{0} \quad \text{(vecteurs colinéaires)}$$

et

$$\overline{M_O(\vec{P})} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

La plupart du temps, les moments des forces sont des vecteurs perpendiculaires au plan de rotation : ils sont donc colinéaires. On peut alors passer à la relation algébrique, qui est plus pratique pour en faire la somme.

Pour établir une relation algébrique avec les moments d'une force, <u>on choisit une orientation positive</u> pour la rotation.

Dès lors, si une force favorise un mouvement dans le sens positif choisi, la valeur de son moment sera notée positivement (négativement dans le cas contraire).

$$\left\|\overline{M_O\left(\vec{P}\right)}\right\| = OG \times P \times \sin(\theta) = L.m.g.\sin(\theta) = OG \times P \times \frac{\text{OH}}{\text{OG}} = P \times OH$$

<u>DEFINITION :</u>

On appelle <u>BRAS DE LEVIER</u> OH d'une force la distance entre l'axe de rotation et la droite d'action de cette force.

En conséquence, la valeur du moment d'une force peut s'exprimer par la relation :

$$M_O\left(\vec{F}\right) = \pm\left\|\vec{F}\right\| \times OH$$

Le signe dépend du sens positif choisi

2. Théorème du moment cinétique.

Le **moment cinétique** d'un solide ponctuel M en rotation autour d'un axe fixe passant par 0 est défini par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_O} = m.\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}}$$

$\vec{v}$ représente le vecteur vitesse du solide M. Ce vecteur est donc normal au plan de rotation.

Unité du moment cinétique.

$$\left[\overrightarrow{\sigma_O}\right] = [m].\left[\overrightarrow{OM}\right].\left[\vec{v}\right] = M.L^2.T^{-1}$$

Il s'exprime en kg.m².s⁻¹.

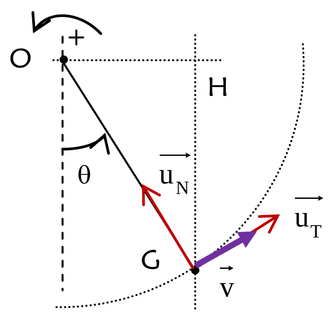
THEOREME DU MOMENT CINETIQUE TMC :

La somme des moments des forces appliquées sur un solide M pouvant tourner autour d'un axe passant par O est égale à la dérivée du moment cinétique de ce solide :

$$\sum \overrightarrow{M_0\left(\vec{F}\right)} = \frac{d\overrightarrow{\sigma_0}}{dt}$$

Comme il s'agit généralement d'une relation vectorielle perpendiculaire au plan de rotation, on peut alors passer à la relation algébrique.

Application au cas du pendule.



$$-M_O\left(\vec{P}\right) + 0 = \frac{d\left(m \times OG \times v \times \sin(90°)\right)}{dt}$$

$$-L.m.g.\sin(\theta) = m.L.\frac{dv}{dt} = m.L.\dot{v}$$

Comme la vitesse linéaire est liée à la vitesse angulaire par la relation $v = L.\dot{\theta}$, l'égalité précédente devient :

$$-L.m.g.\sin(\theta) = m.L^2.\ddot{\theta}$$

Soit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$

Pour un angle θ petit, on peut écrire : $\sin(\theta) \cong \theta$

Et alors : $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}.\theta = 0$

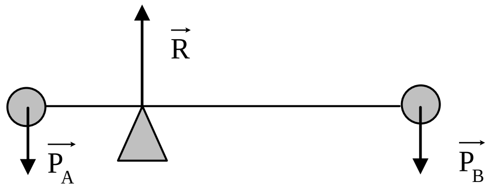
On retrouve **l'équation différentielle d'un oscillateur libre harmonique**.

B- Le moment d'inertie.

1. Condition d'équilibre d'un solide en rotation

La première loi de Newton ne suffit pas à définir l'équilibre d'un solide réel.

EXEMPLE :



Deux personnes de même masse sont assises sur une balançoire, à une distance différente de l'axe de rotation. Comme le système constitué de la balançoire avec ses 2 occupants ne translate pas, on peut énoncer le principe d'inertie :

$$\vec{P}_A+\vec{P}_B+\vec{R}=\vec{0}$$

Et pourtant, le système bascule, autrement dit le système est animé d'un mouvement de rotation : il faut donc une 2ème condition.

CONDITION D'EQUILIBRE D'UN SYTEME :

Pour qu'un système solide puisse rester en équilibre, il faut 2 conditions :

- Il ne doit pas translater :

$$\sum \vec{F} = 0$$

- Il ne doit par tourner :

$$\sum \overline{M_0(\vec{F})}=\vec{0}$$

2. Inertie de rotation d'un corps

L'inertie d'un corps correspond à la résistance qu'il oppose à tout changement de mouvement.

Dans le cas d'un mouvement de translation, cette inertie est liée à la masse du corps : plus elle est grande, plus il est difficile de modifier le mouvement de translation de celui-ci (cf. 2ème loi de Newton).

Dans le cas d'un mouvement de rotation, la grandeur caractéristique s'appelle moment d'inertie : il dépend de la masse du corps ainsi que de sa répartition autour de son axe de rotation.

Reprenons le théorème du moment cinétique sous sa forme algébrique, pour un solide ponctuel en rotation à une distance r de O :

$$\sum M_0(\vec{F})=m.r.\dot{v}$$

Soit en considérant l'accélération angulaire :

$$\sum M_0(\vec{F})=m.r^2.\ddot{\theta}$$

Autrement dit, pour modifier la vitesse angulaire de ce solide, il faut tenir compte non seulement de sa masse m, mais aussi du carré de la distance à son axe de rotation : son **moment d'inertie** est :

$$I_O = m.R^2$$

Pour un solide constitué de plusieurs parties assimilables à des masses ponctuelles, son moment d'inertie s'exprime :

$$I_0 = \sum_i m_i.r_i^2$$

Unité du moment d'inertie : kg.m².

D'une manière générale, plus la masse d'un corps est importante et concentrée loin de l'axe de rotation, plus son moment d'inertie I_0 est élevé, donc plus sa résistance à une modification de son mouvement sera grande.

REMARQUE :

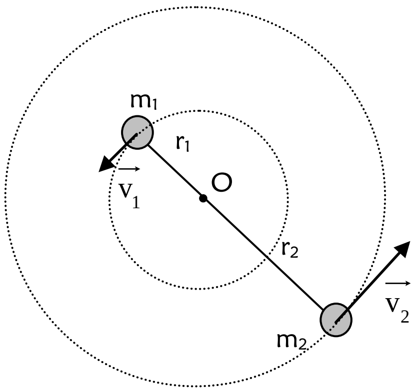
Pour un solide dont la masse varie de façon continue, on passe alors à l'expression intégrale : $I_0 = \int r^2.dm$

EXEMPLES :

Pour une sphère : $I_0 = \frac{2}{5}.m.R^2$ Pour un cylindre : $I_0 = \frac{1}{2}.m.R^2$

3. Le théorème du moment d'inertie

Considérons un système constitué de 2 masses ponctuelles m_1 et m_2 sur un axe en rotation autour de 0 :



Le moment cinétique du système s'exprime :

$$\sigma_0 = m_1.r_1.v_1 + m_2.r_2.v_2$$

$$\sigma_0 = m_1.r_1^2.\dot{\theta} + m_2.r_2^2.\dot{\theta}$$

$$\sigma_0 = I_0.\dot{\theta}$$

donc $\frac{d\sigma_0}{dt} = I_0.\ddot{\theta}$ (si le moment d'inertie I_0 est constant)

En généralisant à un solide réel, le théorème du moment cinétique peut alors s'exprimer en fonction du moment d'inertie : c'est le **théorème du moment d'inertie TMI :**

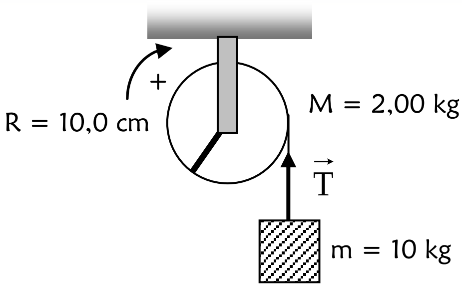
$$\sum M_0(\vec{F}) = I_0.\ddot{\theta}$$

APPLICATION 1 : chute d'une masse reliée à une poulie cylindrique par un fil.

Le système est lâché sans vitesse initiale.

Le fil est considéré comme idéal.

Pour déterminer l'accélération angulaire de la poulie, nous considérerons successivement une poulie réelle, puis une poulie idéale (c'est-à-dire de moment d'inertie négligeable).



- **Si la poulie est réelle:** ($I \neq 0$)

  - *Considérons le système {poulie}.*

Elle est soumise au poids de la poulie $\vec{P}_p$, à la force $\vec{F} = -\vec{T}$ et à la réaction de l'axe de rotation $\vec{R}$.

Appliquons le théorème du moment d'inertie :

$$M_C(\vec{P}_p) + M_C(\vec{F}) + M_C(\vec{R}) = I.\ddot{\theta}$$
$$0 + T.R + 0 = I.\ddot{\theta}$$

  - *Considérons maintenant le système {masse]*

Il est soumis au poids $\vec{P}_m$ et à la force $\vec{T}$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$
$$P - T = m.a = m.R.\ddot{\theta}$$
$$m.g - \frac{I}{R}.\ddot{\theta} = m.R.\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{m.g}{m.R + \frac{I}{R}}$$

avec $I = \frac{1}{2}.M.R^2$

A.N. : $\ddot{\theta} = 89{,}2\ \text{rad.s}^{-1}$ et T = 8,90 N

- **Si la poulie est idéale :** sa masse est négligeable, donc son moment d'inertie I est nul et T = 0

Le système est alors équivalent à la chute libre :

$$P = m.a$$
$$m.g = m.R.\ddot{\theta}$$
$$\text{soit } \ddot{\theta} = \frac{g}{R}$$

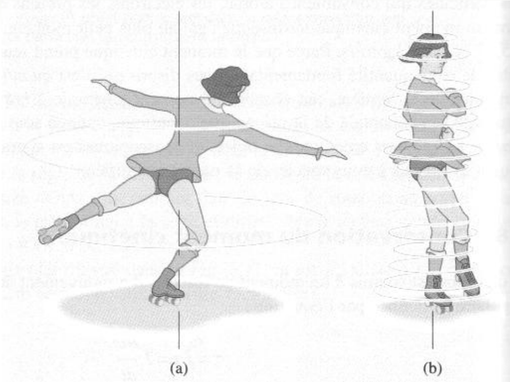
A.N. : $\ddot{\theta} = 98{,}1\ \text{rad.s}^{-1}$

- Le pourcentage d'erreur commis en considérant la poulie comme idéale est d'environ 10 %

APPLICATION 2 : conservation du moment cinétique

Considérons une patineuse en rotation. Lorsqu'elle a les bras écartés, son moment d'inertie vaut : Ia = 3,5 kg.m², et sa vitesse angulaire vaut $\dot{\theta} = 1{,}0\,\mathrm{tr.s^{-1}}$. Lorsqu'elle rapproche ses bras, son moment d'inertie vaut alors : Ib = 1,0 kg.m², (Ia > Ib). Que devient sa vitesse angulaire ?

(faire l'expérience sur une chaise pivotante, avec un lest dans chaque main)



Appliquons le TMC (pas le TMI, car le moment d'inertie n'est pas conservé)

$\sum M_\Delta(\vec{F}) = 0 = \frac{d\sigma_0}{dt}$ donc σ_0 = cst = $I_a . \dot{\theta}_a$ = $I_b . \dot{\theta}_b$ d'où $\dot{\theta}_b$ = 3,5 tr.s^{-1}

La patineuse tourne plus rapidement !

C- L'énergie cinétique de rotation

1. Définition

Le mouvement d'un solide, de masse m et de moment cinétique I, peut être décomposé en :

- un mouvement de translation, d'énergie cinétique :

$$\boxed{E_{CT} = \frac{1}{2}.m.v^2}$$

- un mouvement de rotation, d'énergie cinétique :

$$\boxed{E_{CR} = \frac{1}{2}.I.\omega^2 = \frac{1}{2}.I.\dot{\theta}^2}$$

L'énergie cinétique de rotation peut permettre au système en rotation d'effectuer un travail, comme par exemple le golfeur qui lance la balle.

2. Application

Reprenons le cas de la patineuse en rotation, et appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{cb} - E_{ca} = \frac{1}{2}.I_b.\dot{\theta}_b^2 - \frac{1}{2}.I_a.\dot{\theta}_a^2 = \frac{1}{2}\left(I_b\left(\frac{I_a}{I_b}.\dot{\theta}_a\right)^2 - I_a.\dot{\theta}_a^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{I_a^2}{I_b} - I_a\right).\dot{\theta}_a^2$$

soit $E_{cb} - E_{ca} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_a^2 - I_a.I_b}{I_b}\right).\dot{\theta}_a^2 > 0$: l'énergie cinétique de la patineuse a augmenté !

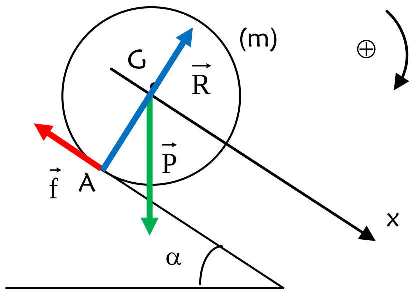
La patineuse a en effet fourni un travail moteur pou rapprocher ses bras

D- Roulement sur un plan incliné

1. Présentation du problème

Considérons le système {cylindre}, de rayon R et de masse m, dans un référentiel terrestre, qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α.

Son moment d'inertie a pour expression : $I = \frac{1}{2}.m.R^2$



QUESTION : que se passerait-il en absence de frottement ?

Le cylindre glisserait sur le plan incliné sans tourner : le point A de la sphère resterait en contact permanent avec le plan incliné. Ce serait un mouvement de translation.

Il doit donc y avoir une force de frottement statique $\vec{f}$ pour faire tourner le cylindre.

2. Accélération linéaire du système

Le mouvement du système peut être décomposé en 2 :

un mouvemente de translation : appliquons le P.F.D. :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_G}$ où $\overrightarrow{a_G}$ représente l'accélération du centre de gravité.

En projetant selon le plan incliné :

$m.g.\sin(\alpha) - f = m.a_x$ (1)

un mouvement de rotation : appliquons le T.M.I. :

$\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = I_G.\ddot{\theta}$ soit $f.R = \frac{1}{2}.m.R^2.\ddot{\theta}$ (2)

Or $a_x = R.\ddot{\theta}$ donc les équations (1) et (2) deviennent :

$$\begin{cases} f.R = -m.R.a_x + R.m.g.\sin(\alpha) \\ f.R = \frac{1}{2}.m.R.a_x \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -\frac{3}{2}.m.R.a_x + R.m.g.\sin(\alpha) \\ f = \frac{1}{2}.m.a_x \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = \frac{2}{3}.g.\sin(\alpha) \\ f = \frac{1}{3}.m.g.\sin(\alpha) \end{cases}$$

L'accélération linéaire a_x ne dépend donc pas de la masse du cylindre, ni de son rayon !

QUESTION : quelle est l'expression de l'accélération en cas de glissement pur ?

En appliquant le P.F.D. (f=0), on a : $a_x = g.\sin(\alpha)$

Dans le cas d'un roulement sans glissement, l'accélération linéaire a_x est donc inférieure au cas du glissement.

3. Condition sur le frottement

$$f = \frac{1}{3}.m.g.\sin(\alpha)$$

Le frottement est statique tant que : $f \leq f_{smax} = \mu.R_N$

où μ est le coefficient de frottement statique.

APPLICATION : déterminer α si μ = 0,50.

$\frac{1}{3}.m.g.\sin(\alpha) \leq \mu.R_N$ or $R_N = m.g.\cos(\alpha)$

$$\tan(\alpha) \leq 3.\mu$$

$$\alpha \leq 56°$$

Pour $\mu = 0{,}50$, il a donc glissement si $\alpha > 56°$

REMARQUE : on peut retrouver l'accélération en appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

Etat 1 : au repos : $E_{C1} = 0$

Etat 2 : rotation sans glissement : $E_{C2} = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.I_G.\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}.mv^2 + \frac{1}{4}m.R^2.\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}.m.v^2$

$$E_{C2} - E_{C1} = W(\vec{P}) + W(\overrightarrow{R_N}) + W(\vec{f})$$

$$\frac{3}{4}.m.v^2 = m.g.x.\sin(\alpha) + 0 + 0$$

$$v^2 = \frac{4}{3}.g.x.\sin(\alpha)$$

En dérivant par rapport au temps :

$$2.v.\dot{v} = \frac{4}{3}.g.\dot{x}.\sin(\alpha) = \frac{4}{3}.g.v.\sin(\alpha)$$

soit

$$\dot{v} = a_X = \frac{2}{3}.g.\sin(\alpha)$$